Jean-Marc Garnier

Les mathématiques du CAPES

CAPES

Écrit et oral

2e édition

ellipses

Chapitre 1

BASES MATHÉMATIQUES

INTRODUCTION

Les mathématiques reposent sur un système d'axiomes, un axiome étant un énoncé que l'on pose comme vérité. Ensuite, à l'aide du raisonnement logico-déductif, on établit à partir de ces axiomes des propositions, des théorèmes. Toute la difficulté est de bien choisir le système d'axiomes initial et surtout de vérifier que les axiomes choisis ne sont pas contradictoires entre eux. En effet, car si c'est le cas, toute la théorie construite conduit à toutes les propositions à la fois vraies et fausses. L'évolution historique a conduit les mathématiciens, vers 1900, à construire toutes les mathématiques connues à ce jour à partir d'une théorie, appelée « la théorie des ensembles », dépendant d'un système d'axiomes (on devrait dire à partir d'une théorie des ensembles, car il y en a plusieurs). Le système d'axiomes sur lequel on se base dans cet ouvrage est celui de Zermelo-Frankael. À ce jour, ce système semble non contradictoire. On explicitera sommairement ce système, sans rentrer dans les détails qui dépassent le niveau de ce cours. Il est important que de futurs enseignants aient quelques notions sur la base des mathématiques, car toutes les mathématiques connues à ce jour sont construites sur la théorie des ensembles et donc sur ce système d'axiomes. On verra d'ailleurs que la notion d'ensemble sera complètement présente tout au long de cet ouvrage, y compris en probabilité.

Nous définirons donc, après un rappel des règles élémentaires de logique, une ébauche de la théorie des ensembles, les relations fonctionnelles, d'équivalence et d'ordre et ensuite les notions de structure (groupes, anneaux, corps). Tous les paragraphes de ce chapitre sont indispensables et doivent être maîtrisés par les futurs enseignants.

Dans ce chapitre, nous utiliserons parfois dans les exemples qui éclairent des notions rencontrées, les ensembles et sous-ensembles de $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, ensembles qui sont connus et qui seront revus en détail au chapitre 2.

1.1 Rappels des règles de logique

Une assertion est un énoncé que l'on peut affirmer vrai ou faux sans ambiguïté, l'une de ces deux possibilités excluant l'autre.

Un énoncé vrai dans certaines situations et faux dans d'autres, mais pour lequel dans une situation donnée, nous pouvons décider si cet énoncé est vrai ou faux, s'appelle une proposition.

Une proposition importante s'appelle un théorème. Une proposition se déduisant immédiatement d'une proposition s'appelle un corollaire.

Par exemple, la somme des angles d'un triangle est de 180 degrés est une proposition vraie en géométrie euclidienne, fausse en géométrie hyperbolique et en géométrie sphérique. Ou encore, une des médianes d'un triangle est aussi une hauteur est vraie pour les triangles isocèles et fausses pour les triangles non isocèles.

La négation d'une proposition P, notée « non P » est vraie lorsque P est fausse et fausse lorsque P est vraie.

La conjonction de deux propositions P et Q notée « $P\ et\ Q$ » est vraie si et seulement si P et Q sont vraies simultanément et fausse dans tous les autres cas.

La disjonction de deux propositions P ou Q notée « $P \quad \text{ou} \quad Q$ » est fausse si et seulement si P et Q sont fausses simultanément et vraie dans tous les autres cas.

Si $P \;\text{ ou }\; Q$ est vraie, le terme « ou » a toujours le sens suivant, soit P est vraie, soit Q est vraie, soit P et Q sont vraies simultanément. En mathématique, le terme « ou » a toujours le sens précédent.

La proposition « non P ou Q » s'appelle implication et se note $P \Rightarrow Q$ et s'énonce P implique Q ou P entraîne Q. On dit aussi que P est l'hypothèse et Q est la conclusion.

Les propositions P et Q sont dites équivalentes si $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$. On note $P \Leftrightarrow Q$ l'équivalence des propositions P et Q.

P	Q	P ou Q	P et Q	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	F
F	V	V	F	V	F
F	F	F	F	V	V

Considérons $P \Rightarrow Q$ vraie, alors si P est vraie, Q est vraie et si Q est faux, alors P est faux. La vérité de P est une condition suffisante de la vérité de Q et la vérité de Q est une condition nécessaire de la vérité de P.

Si $P \Leftrightarrow Q$, on dit que P vraie est une condition nécessaire et suffisante pour que Q soit vraie.

Soit P une proposition, au lieu d'écrire P est vraie, nous écrirons seulement P. Donc, quand nous écrirons une proposition, nous considérerons que cette proposition est vraie.

Remarque 1. On considère qu'une proposition est toujours vraie ou fausse et qu'elle ne peut être à la fois vraie et fausse en même temps. On doit donc rejeter toutes les théories dans lesquelles les propositions P et non P sont vraies et fausses en même temps. De telles théories sont appelées des théories contradictoires. On démontre que dans une théorie contradictoire toute proposition devient alors vraie et fausse, d'où le souci qu'ont eu les mathématiciens d'avoir des système d'axiomes qui ne soient pas contradictoires. Il est impossible parfois de démontrer que certaines théories ne soient pas contradictoires. C'est le cas de la théorie des ensembles sur laquelle repose toutes les mathématiques connues à ce jour. Mais, pour le moment, dans les connaissances actuelles, la théorie des ensembles est non contradictoire.

Remarque 2. En pratique, en mathématique, quand on utilise $P \Rightarrow Q$, on utilise l'implication avec P vraie et on essaye d'en déduire une proposition Q vraie. On utilise, en mathématique, très, très rarement le cas où du faux, on peut en déduire du vrai.

1.2 Théorie des ensembles

1.2.1 Notion d'ensemble

Un ensemble est une collection, un groupement d'objets et est constitué d'éléments. C'est une notion première relativement intuitive. Par exemple l'ensemble contenant les éléments a, b, c se note $\{a, b, c\}$. De même $\{a, b\}$ est l'ensemble contenant les éléments a et b.

On considère les règles suivantes pour les ensembles :

• Un ensemble E est bien défini quand on possède un critère permettant d'affirmer qu'un élément a appartient à E (noté $a \in E$) ou n'appartient pas à E (noté $a \notin E$).

• L'ensemble formé des éléments a, b, c, d ... s'écrira $\{a, b, c, d, ...\}$.

• Un objet mathématique ne peut être à la fois un ensemble et un élément de cet ensemble.

• Si tout élément d'un ensemble A appartient à un ensemble B, on dit que A est inclus dans B que l'on note $A \subset B$.

On dit aussi que A est un sous-ensemble ou une partie de B.

• Deux ensembles A et B sont dit égaux, noté $A = B$, s'ils sont formés exactement des mêmes éléments. Dans le cas contraire, on note $A \neq B$.

Deux ensembles A et B sont donc égaux si et seulement si $A \subset B$ et $B \subset A$.

• On définit l'ensemble ne contenant aucun élément, appelé l'ensemble vide que l'on note $\emptyset$.

• On considère que l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A (éventuellement vide) est bien un ensemble appelé complémentaire de A dans E et noté $C_E A$ ou C_A s'il n'y a pas d'ambiguïté sur E ou $\overline{A}$ (en probabilité).

• L'ensemble de tous les ensembles n'existe pas.

Remarques.

1. La théorie des ensembles a été inventée ou découverte par Cantor, un peu avant 1900. Elle a été développée les 30 années qui suivirent mais a vécu une période dite des paradoxes car la théorie des ensembles était alors contradictoire. C'est pour cela que les mathématiciens de cette époque définirent des règles et des axiomes sur cette théorie pour ne plus rencontrer ces désordres. Ce qui explique ces distinctions entre éléments appartenant à un ensemble et ensemble inclus dans un ensemble. De nombreux paradoxes venaient de la considération de l'ensemble de tous les ensembles.

2. Le langage courant conduisait aussi à des paradoxes. Considérons les sens différents que peut avoir le verbe être.

   2 est le nombre d'éléments de l'ensemble $\{a, b\}$ (si on note $\{a, b\}$, cela sous-entend que a est différent de b).

   2 est un nombre pair.

   Les nombres pairs sont des entiers.

   Si P désigne l'ensemble des entiers pairs, ces énoncés traduisent :

   1) une égalité $2 =$ le nombre d'éléments de $\{a, b\}$.

   2) une appartenance $2 \in P$.

   3) une inclusion $P \subset \mathbf{Z}$.

   C'est la confusion entre ces trois notions qui a conduit aussi aux problèmes rencontrés par les mathématiciens au début du vingtième siècle et qui les ont amenés à bien distinguer ces notions différentes.

3. La théorie actuelle des ensembles considère des ensembles et des classes d'ensembles. On peut considérer la classe de tous les ensembles qui n'est pas un ensemble.

4. On peut considérer un ensemble ne contenant qu'un élément a, on écrira alors $a \in \{a\}$.
5. L'ordre d'écriture des éléments d'un ensemble n'a pas d'importance, $\{a, b\} = \{b, a\}$. C'est le même ensemble.

1.2.2 Quantificateurs

Soit A une partie d'un ensemble E. On appelle propriété caractéristique des éléments de A tout critère permettant de décider pour tout élément x de E entre les deux propositions $x \in A$ et $x \notin A$.

Donc, si P est une propriété caractéristique des éléments de A, alors « non P » est une propriété caractéristique des éléments de $C_E A$. On dit que P est une propriété définie sur E.

Donc, à $x \in A$, nous pouvons dire x possède la propriété P que nous noterons $P(x)$. Nous écrirons

$$A = \{x \in E, P(x)\}$$

Maintenant, soit P une propriété définie sur un ensemble E et soit A l'ensemble des éléments de E qui possèdent P comme comme propriété caractéristique, alors :

• Soit A est non vide, donc il existe au moins un élément de E vérifiant P, on note

$$\exists x \in E, P(x)$$

qui se lit : il existe au moins un élément x de E vérifiant la propriété P.

• Soit A est vide, aucun élément x de E ne vérifie la propriété P.

• Soit $A = E$, alors tout élément x de E vérifie la propriété P, on note

$$\forall x \in E, P(x)$$

qui se lit : quel que soit un élément x de E, x vérifie la propriété P.

Les symboles $\exists$ et $\forall$ s'appellent des quantificateurs.

Remarques.

1. Un des intérêts des quantificateurs est le suivant :
   la négation de $\exists x \in E, P(x)$ est $\forall x \in E$, non $P(x)$ et
   la négation de $\forall x \in E, P(x)$ est $\exists x \in E$, non $P(x)$
2. Attention à l'ordre dans lequel on utilise les quantificateurs.
   $\forall$...... $\exists$.... n'a pas du tout la même signification que $\exists$..... $\forall$.....
   Par exemple :
   $\forall x \in \mathbf{R}\ \exists y \in \mathbf{R}$, $x \leq y$ est une proposition vraie.
   $\exists x \in \mathbf{R}\ \forall y \in \mathbf{R}$, $x \leq y$ est une proposition fausse.

1.2.3 Axiomes de la théorie des ensembles

Quels que soient les ensembles A et B :

1. Il existe un ensemble appelé réunion de A et B, noté $A \cup B$ dont les éléments sont tous les éléments appartenant à A ou à B.
2. Il existe un ensemble appelé intersection de A et B, noté $A \cap B$ dont les éléments sont tous les éléments appartenant à A et à B.
3. Il existe un ensemble appelé ensemble produit de A et B, noté $A \times B$ dont les éléments sont tous les couples (a, b) tels que $a \in A$ et $b \in B$.
4. Soit P une propriété définie sur A, il existe un ensemble dont les éléments sont tous les éléments appartenant à A vérifiant la propriété P.
5. Il existe un ensemble noté $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ appelé ensemble des parties de A, dont les éléments sont tous les sous-ensembles de A.
6. Il existe un ensemble dont les éléments sont toutes les applications de A dans B. Cet ensemble est noté $\mathcal{F}(A, B)$.
7. Si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence définie sur A, il existe un ensemble appelé ensemble quotient de A par $\mathcal{R}$, noté $\dfrac{A}{\mathcal{R}}$ ou $A/\mathcal{R}$, dont les éléments sont toutes les classes d'équivalence par cette relation.
8. Il existe un ensemble infini noté $\mathbf{N}$ dont les éléments s'appellent les entiers naturels.

Remarque 1. Pour la définition des applications, voir le paragraphe suivant 1.5 et pour la définition des relations, voir le paragraphe suivant 1.4.

Remarque 2. Pour une partie A quelconque d'un ensemble E, on a :

$$\boxed{A \subset E \Leftrightarrow A \in \mathcal{P}(E)}$$

CONVENTION. Dans la suite, les ensembles considérés dans les énoncés des propositions, des théorèmes, des corollaires, des lemmes seront supposés non vides.

1.3 Raisonnements usuels

Les exemples de ce paragraphe utilisent des ensembles connus que l'on abordera au chapitre 2.

• **Raisonnement par l'absurde**.

Soit deux propositions P et Q, on veut montrer que $P \Rightarrow Q$.

On suppose « P et non Q » et on essaye d'aboutir à une contradiction, c'est-à-dire un énoncé faux.

En effet, non(non P ou Q) est la proposition « P et non Q ». Donc si « P et non Q » est faux, non(P et non Q) est vraie et donc « non P ou Q » est vraie.

Exemple. Soit deux réels a et b. Montrons que si $\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$, $a < b + \varepsilon$, alors $a \leq b$.

Supposons $a < b + \varepsilon$ et $a > b$, alors pour $\varepsilon = a - b > 0$, comme $a < b + \varepsilon$, alors $a < b + a - b$, d'où $a < a$, impossible et donc faux.

Donc, $a > b$ est faux et donc $a \leq b$.

• **Raisonnement par contraposition**.

Soit deux propositions P et Q, on veut montrer que $P \Rightarrow Q$. On montre que non $Q \Rightarrow$ non P. Si non $Q \Rightarrow$ non P est vraie, alors la proposition non(non Q) ou non P est vraie. Mais cette proposition est la proposition non P ou Q, qui est $P \Rightarrow Q$.

Exemple. Montrez que si un entier relatif n vérifie n^2 est pair, alors n est un entier pair.

Si n est impair, alors il existe $p \in \mathbf{Z}$ tel que $n = 2p+1$ et donc alors $n^2 = 4p^2+4p+1$ est un entier impair. Donc, n^2 entier pair $\Rightarrow n$ entier pair.

• **Raisonnement par équivalence**.

Soit deux propositions P et Q, on veut montrer que $P \Leftrightarrow Q$, on peut montrer $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$ ou raisonner directement par équivalence.

Exemples.

Soit dans $\mathbf{R^2}$ le système $\left\{ \begin{array}{rcl} 2x+3y & = & 7 \\ 4x-y & = & 7 \end{array} \right.$ à résoudre. En vérifiant que à chaque étape, l'équivalence est légitime,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x+3y & = & 7 \\ 4x-y & = & 7 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2x+3y & = & 7 \\ 7y & = & 7 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 2 \\ y & = & 1 \end{array} \right.$$

Si on raisonne par implication, on trouve que les solutions, si elles existent, sont à chercher parmi le couple $(2, 1)$. Il faut alors vérifier que cette solution convient.

Remarque. NE PAS CONFONDRE, « il faut montrer que » et « il suffit de montrer que ».

Il faut savoir distinguer entre condition nécessaire et condition suffisante.

Exemple. Pour que $x > 2$, il est nécessaire que $x^2 > 4$ (mais pas suffisant).
Pour que $x^2 > 4$, il suffit que $x > 2$ (mais pas nécessaire).

• **Existence et unicité**.
Pour établir un résultat d'existence et d'unicité, très souvent on sépare la preuve de l'existence et celle de l'unicité, sauf si on peut démontrer simultanément l'existence et l'unicité.

• **Disjonction des cas**.
On essaye tous les cas possibles, s'ils ne sont pas trop nombreux.

Exemple. Montrez que, dans **R**, $|x-2| < 1 \Rightarrow 1 < x < 3$.
Si $x \geq 2$, $|x-2| = x-2$ et donc $x < 3$. D'où, $2 \leq x < 3$.
Si $x \leq 2$, $|x-2| = -x+2$ et donc $x > 1$. D'où, $1 \leq x < 2$.
et finalement, $|x-2| < 1 \Rightarrow 1 < x < 3$.

• **Raisonnement par récurrence**.
On établira la démonstration de ce raisonnement dans le chapitre suivant.
Énoncé. Soit $P(n)$ une proposition dépendant d'un entier naturel n. On suppose

1. $\exists n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $P(n_0)$ soit vraie.
2. $\forall n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est une proposition vraie.

Alors, pour tout $n \geq n_0$, $P(n)$ est une proposition vraie.

Remarque. Un raisonnement par récurrence se fait en trois étapes.
Étape 1. $\exists n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $P(n_0)$ soit vraie.
Étape 2. $\forall n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.
Étape 3. Conclusion.

Il faut éviter de rédiger en écrivant :
« supposons que $\forall n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie, montrons que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ », car dans ce cas, on suppose la conclusion que l'on veut démontrer établie.

Exemples.
Soit la proposition $P(n)$: $\forall n \in \mathbf{N}$, 3 divise $4^n - 1$. On a $P(1)$ vraie et pour $n \geq 1$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, donc pour tout $n \geq 1$, $P(n)$ est vraie.

Soit la proposition $P(n)$: $\forall n \in \mathbf{N}$, 3 divise $4^n + 1$. On a $P(1)$ faux et pour $n \geq 1$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, mais pour $n \geq 1$, $P(n)$ est faux.
Pour préciser, si 3 divise $4^n + 1$, alors $\exists k \in \mathbf{N}$ tel que $4^n + 1 = 3k$. Donc,